

2 落下運動

物理基礎+物理

1 落下運動

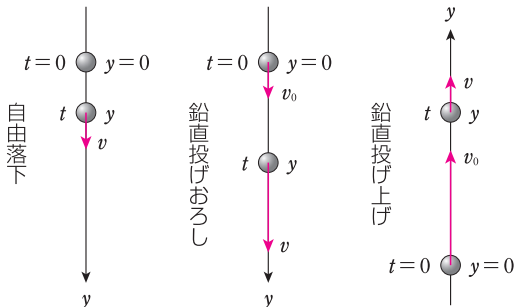
- ①**重力加速度** 空気抵抗が無視できれば、物体はその質量に関係なく、同じ加速度で落下する*。地上付近で、物体が重力のみを受けて落下するときの加速度を**重力加速度**という。重力加速度は鉛直下向きで、その大きさは記号 g で表され、 9.8m/s^2 で一定である。

重力加速度の大きさ $g=9.8\text{m/s}^2$

- ②**自由落下** 初速度 0 で落下する物体の運動。

- ③**鉛直投げおろし** 速さ v_0 で、鉛直下向きに投げおろされた物体の運動。

- ④**鉛直投げ上げ** 速さ v_0 で、鉛直上向きに投げ上げられた物体の運動。



	y 軸の向き	加速度	速度	位置	v-y の関係式
自由落下	下向きが正	g	$v=gt$	$y=\frac{1}{2}gt^2$	$v^2=2gy$
鉛直投げおろし	下向きが正	g	$v=v_0+gt$	$y=v_0t+\frac{1}{2}gt^2$	$v^2-v_0^2=2gy$
鉛直投げ上げ	上向きが正	$-g$	$v=v_0-gt$	$y=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$	$v^2-v_0^2=-2gy$

2 放物運動 物理

- ①**水平投射** 速さ v_0 [m/s] で水平に投げ出された物体の運動は、水平方向と鉛直方向に分けて考えることができる。

水平方向…等速直線運動。

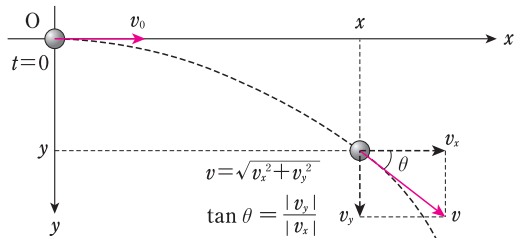
鉛直方向…自由落下と同じ運動。

速度の x 成分 v_x [m/s], y 成分 v_y [m/s], 位置の x 座標, y 座標は、それぞれ次のように表される。

$$v_x = v_0 \quad \dots ① \quad x = v_0 t \quad \dots ②$$

$$v_y = gt \quad \dots ③ \quad y = \frac{1}{2}gt^2 \quad \dots ④$$

$$\text{軌道を表す式: } y = \frac{g}{2v_0^2}x^2 \quad \dots ⑤$$



*本書では、特にことわらない限り、物体が受ける空気抵抗を無視して考える。

- ②**斜方投射** 水平から角度 θ 上向きに、速さ v_0 [m/s] で投げ出された物体の運動は、水平方向と鉛直方向に分けて考えることができる。

水平方向…等速直線運動。

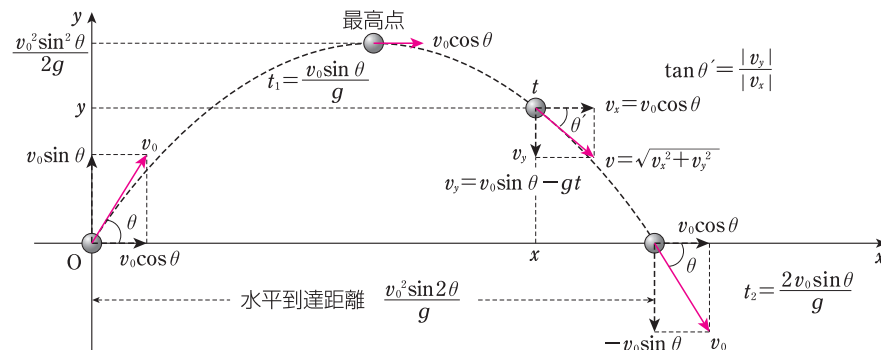
鉛直方向…鉛直投げ上げと同じ運動。

速度の x 成分 v_x [m/s], y 成分 v_y [m/s], 位置の x 座標, y 座標は、次のように表される。

$$v_x = v_0 \cos \theta \quad \dots ⑥ \quad x = v_0 \cos \theta \cdot t \quad \dots ⑦$$

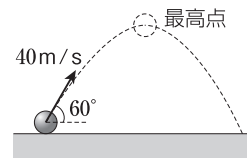
$$v_y = v_0 \sin \theta - gt \quad \dots ⑧ \quad y = v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \dots ⑨$$

$$\text{軌道を表す式: } y = \tan \theta \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 \quad \dots ⑩$$



➤ **プロセス** ➤ 重力加速度の大きさを 9.8m/s^2 として、次の各問に答えよ。

- 小球を自由落下させた。1.0s 後の速さと落下距離を求めよ。
- 小球を速さ 10m/s で鉛直下向きに投げおろした。2.0s 後の速さと落下距離を求めよ。
- 小球を鉛直上向きに速さ 9.8m/s で投げ上げたとき、最高点に達するのは何 s 後か。また、最高点の高さはいくらか。
- 鉛直上向きに投げ上げられた小球が、最高点に達したときの速度と加速度を求めよ。
- 小球を速さ 5.0m/s で水平方向に投げた。1.0s 後の小球の速度の水平成分の大きさと、鉛直成分の大きさはそれぞれいくらか。【物理】
- 図のように、小球を水平から 60° 上向きに速さ 40m/s で打ち上げた。最高点での速度の水平成分の大きさと、鉛直成分の大きさはそれぞれいくらか。【物理】



解答 ➤

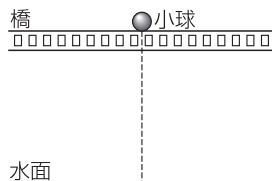
- 1 9.8m/s, 4.9m 2 30m/s, 40m 3 1.0s 後, 4.9m 4 0m/s, 鉛直下向きに 9.8m/s²
5 5.0m/s, 9.8m/s 6 20m/s, 0m/s



基本例題4 自由落下

→基本問題 29, 30, 31

橋の上から小球を静かに落としたところ、2.0s 後に水面に達した。重力加速度の大きさを 9.8m/s^2 として、次の各問に答えよ。



- (1) 水面から橋までの高さはいくらか。
- (2) 水面に達する直前の速さはいくらか。
- (3) 橋の高さの中央を通過するときの速さはいくらか。

■ 指針 小球を落とした位置を原点とし、鉛直下向きに y 軸をとり、自由落下の公式を用いる。自由落下をする物体の速さは、時間に比例して大きくなるが、距離に比例しないことに注意する。

■ 解説 (1) $t=2.0\text{s}$ で水面に達するので、 $[y=\frac{1}{2}gt^2]$ から、

$$y=\frac{1}{2}\times 9.8\times 2.0^2=19.6\text{m} \quad 20\text{m}$$

- (2) $t=2.0\text{s}$ のときの速さは、 $[v=gt]$ から、
 $v=9.8\times 2.0=19.6\text{m/s} \quad 20\text{m/s}$

- (3) 時間 t が与えられていないので、 $[v^2=2gy]$ の式を用いる。

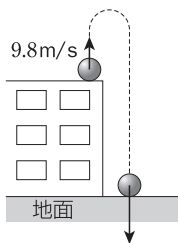
$$v=\sqrt{2\times 9.8\times \frac{19.6}{2}}=\sqrt{2\times 9.8^2}=9.8\sqrt{2}=9.8\times 1.41=13.8\text{m/s} \quad 14\text{m/s}$$

Point ①問題文の「静かに落とした」とは、初速度 0 で落下させたという意味である。
 ②ルートの計算では、ルートの中にある数値を、2 乗の積に整理できる場合がある。

基本例題5 鉛直投げ上げ

→基本問題 34, 35, 36, 37

ある高さのビルの屋上から、鉛直上向きに速さ 9.8m/s で小球を投げ上げたところ、3.0s 後に地面に達した。重力加速度の大きさを 9.8m/s^2 として、次の各問に答えよ。



- (1) 小球を投げ上げてから最高点に達するまでの時間と、屋上から最高点までの高さを求めよ。
- (2) 小球が地面に達する直前の速さを求めよ。
- (3) 地面からのビルの高さを求めよ。

■ 指針 ビルの屋上を原点とし、鉛直上向きに y 軸をとって、鉛直投げ上げの公式を用いる。投げ上げられた小球が最高点に達するとき、その速度は 0 となる。

■ 解説 (1) 速度が 0 となるのが最高点になる。求める時間 $t(\text{s})$ は、 $[v=v_0-gt]$ から、
 $0=9.8-9.8\times t \quad t=1.0\text{s}$
 求める高さを $y_1(\text{m})$ とすると、

$$[y=v_0t-\frac{1}{2}gt^2] \text{ から、}$$

$$y_1=9.8\times 1.0-\frac{1}{2}\times 9.8\times 1.0^2=4.9\text{m}$$

- (2) 求める速さは、投げ上げてから 3.0s 後の速さである。 $[v=v_0-gt]$ から、
 $v=9.8-9.8\times 3.0=-19.6\text{m/s} \quad -20\text{m/s}$

したがって、速さは 20m/s (v の負の符号は、速度が鉛直下向きであることを表している。)

- (3) 求める高さは、投げ上げてから 3.0s 後の y 座標 $y_2(\text{m})$ の大きさである。 $[y=v_0t-\frac{1}{2}gt^2]$ から、

$$y_2=9.8\times 3.0-\frac{1}{2}\times 9.8\times 3.0^2=-14.7\text{m}$$

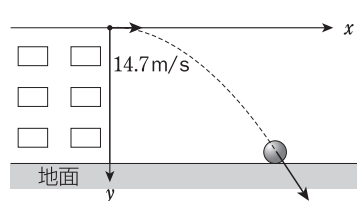
これは、屋上を原点としたときの地面の y 座標である。したがって、ビルの高さは 15m

Point y 軸の原点を地面にとるとは限らない。屋上を原点にとって、鉛直上向きを正としているので、地面の座標は負の値で表される。

基本例題6 水平投射 物理

→基本問題 39

高さ 19.6m のビルの屋上から、小球を水平に速さ 14.7m/s で投げ出した。重力加速度の大きさを 9.8m/s^2 として、次の各問に答えよ。



- (1) 投げ出してから、地面に達するまでの時間を求めよ。
- (2) 小球は、ビルの前方何mの地面に達するか。
- (3) 地面に達する直前の小球の速さを求めよ。

■ 指針 投げ出した位置を原点とし、水平右向きに x 軸、鉛直下向きに y 軸をとる。小球の運動は、 x 方向では等速直線運動、 y 方向では自由落下と同じ運動をする。

■ 解説 (1) 地面の y 座標は 19.6m であるから、 $[y=\frac{1}{2}gt^2]$ を用いて、

$$19.6=\frac{1}{2}\times 9.8\times t^2 \quad t^2=4.0$$

$t=\pm 2.0\text{s} \quad t>0$ のので、 $t=2.0\text{s}$ は解答に適さない。したがって、 2.0s

- (2) 地面に達するまでの 2.0 秒間、小球は、水平方向に速さ 14.7m/s の等速直線運動をする。

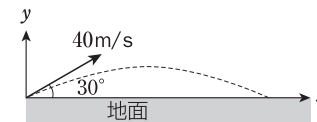
$$x=v_xt=14.7\times 2.0=29.4\text{m} \quad 29\text{m}$$

- (3) 鉛直方向の速度の成分 v_y は、
 $v_y=gt=9.8\times 2.0=19.6\text{m/s}$
 小球の速さ $v(\text{m/s})$ は、水平方向と鉛直方向の速度を合成し、その大きさとして求められる。
 $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{14.7^2+19.6^2}$
 $=\sqrt{(4.9\times 3)^2+(4.9\times 4)^2}=4.9\sqrt{3^2+4^2}$
 $=4.9\times 5=24.5\text{m/s} \quad 25\text{m/s}$

基本例題7 斜方投射 物理

→基本問題 40, 41, 42

水平な地面から、水平とのなす角が 30° の向きに、速さ 40m/s で小球を打ち上げた。図のように x 軸、 y 軸をとり、重力加速度の大きさを 9.8m/s^2 として、次の各問に答えよ。



- (1) 打ち上げてから 0.20s 後の速度の x 成分、 y 成分と、位置の x 座標、 y 座標を求めよ。
- (2) 打ち上げてから最高点に達するまでの時間を求めよ。
- (3) 地面に達したときの水平到達距離を求めよ。

■ 指針 小球は、 x 方向には速さ $40\cos 30^\circ\text{m/s}$ の等速直線運動をし、 y 方向には初速度 $40\sin 30^\circ\text{m/s}$ の鉛直投げ上げと同じ運動をする。最高点に達したとき、小球の速度の鉛直成分は 0 であり、打ち上げてから地面に達するまでの時間は、最高点に達するまでの時間の 2 倍となる。

■ 解説 (1) 速度の x 成分、 y 成分は、
 $v_x=40\cos 30^\circ=40\times \frac{\sqrt{3}}{2}=20\sqrt{3}$
 $=20\times 1.73=34.6\text{m/s} \quad 35\text{m/s}$
 $v_y=v_0\sin\theta-gt=40\sin 30^\circ-9.8\times 0.20$
 $=40\times \frac{1}{2}-1.96=18.0\text{m/s} \quad 18\text{m/s}$

位置の x 座標、 y 座標は、
 $x=v_xt=34.6\times 0.20=6.92\text{m} \quad 6.9\text{m}$
 $y=v_0\sin\theta\cdot t-\frac{1}{2}gt^2$

$$=40\sin 30^\circ\times 0.20-\frac{1}{2}\times 9.8\times 0.20^2=3.80\text{m} \quad 3.8\text{m}$$

- (2) 求める時間は、 $v_y=0$ となるときであり、
 $[v_y=v_0\sin\theta-gt]$ から、
 $0=40\sin 30^\circ-9.8\times t \quad t=2.04\text{s} \quad 2.0\text{s}$
 (3) 水平方向には等速直線運動をし、地面に達するまでに (2) で求めた時間の 2 倍かかるので、
 $x=v_xt=34.6\times (2.04\times 2)=141\text{m} \quad 1.4\times 10^2\text{m}$

基本問題

- 29. 自由落下** ● ビルの屋上から小球を静かに落としたところ、4.0s後に地面に達した。地面に達する直前の小球の速さと、ビルの高さを求めよ。ただし、重力加速度の大きさを 9.8m/s^2 とする。 → 例題4

- 30. 自由落下** ● 高さ44.1mのビルの屋上から、小球を自由落下させた。地面に達するまでの時間と、地面に達する直前の小球の速さを求めよ。ただし、重力加速度の大きさを 9.8m/s^2 とする。 → 例題4

- 31. 自由落下に要する時間** ● 小球を $h[\text{m}]$ だけ自由落下させた。重力加速度の大きさを $g[\text{m/s}^2]$ とし、小球が落下するのに要する時間について、次の各問に答えよ。
- (1) 小球が $h[\text{m}]$ を落下するのに要する時間はいくらか。
 - (2) 小球が前半の $\frac{h}{2}[\text{m}]$ を落下するのに要する時間はいくらか。
 - (3) 小球が後半の $\frac{h}{2}[\text{m}]$ を落下するのに要する時間はいくらか。
- 例題4

- 32. 鉛直投げおろし** ● 高さ39.2mのビルの屋上から、小球を初速度 9.8m/s で鉛直下向きに投げおろした。重力加速度の大きさを 9.8m/s^2 として、次の各問に答えよ。
- (1) 小球が地面に達するのは何s後か。
 - (2) 小球が地面に達する直前の速さを求めよ。
 - (3) 小球がビルの中央を通過するときの速さを求めよ。

- 33. 鉛直投げおろしのグラフ** ● 地面から高さ H の位置で小球Aを自由落下させると同時に、高さ $2H$ の位置から小球Bを鉛直下向きに投げおろすと、A、Bは同時に地面に達した。小球の速さ v を縦軸に、落下時間 t を横軸にとったとき、小球Bのグラフは、図の①～③のうちのどれか。ただし、図の破線は小球Aのグラフであり、 T は小球が地面に達するまでの時間である。

- 34. 鉛直投げ上げ** ● 地面から、鉛直上向きに速さ v_0 で小球を投げ上げた。地上からの高さ h の点を通過するとき、小球の速さはいくらか。ただし、重力加速度の大きさを g とする。 → 例題5

- 35. 鉛直投げ上げ** ● 地面から、速さ 19.6m/s で鉛直上向きに小球を投げ上げた。重力加速度の大きさを 9.8m/s^2 とする。
- (1) 地上 14.7m の点を小球が通り過ぎるのは何s後か。
 - (2) 小球が最高点に達するまでの時間は何sか。
 - (3) 最高点の高さは何mか。
 - (4) 小球が再び地面に落ちてくるまでの時間と、そのときの速度をそれぞれ求めよ。

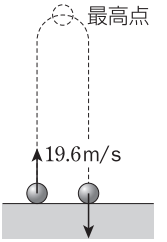
● ヒント (2) 最高点では速度が0となる。

- 36. 鉛直投げ上げ** ● 海面からの高さが 29.4m の位置から、小球を初速度 24.5m/s で鉛直上向きに投げ上げた。重力加速度の大きさを 9.8m/s^2 とする。
- (1) 小球を投げ上げてから、海に落ちるまでの時間はいくらか。
 - (2) 小球が海面に達する直前の速さはいくらか。
 - (3) 海面から最高点までの高さはいくらか。
- 例題5

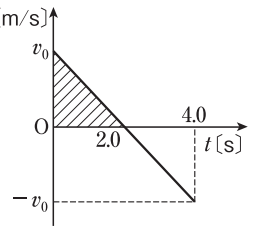
- 37. 鉛直投げ上げの $v-t$ グラフ** ● 図は、地面から速さ v_0 $v[\text{m/s}]$ と時刻 $t[\text{s}]$ との関係を表している。時刻0sのときに投げ上げたものとし、鉛直上向きを正とする。次の各問に答えよ。ただし、重力加速度の大きさを 9.8m/s^2 とする。
- (1) 小球が最高点に達する時刻を求めよ。
 - (2) 小球の初速度を求めよ。
 - (3) 図の斜線部の面積を求め、それが何を表すかを答えよ。
 - (4) 小球の地面からの高さを $y[\text{m}]$ とし、 $t=0\sim 4.0\text{s}$ の間の $y-t$ グラフを描け。
- 例題5

- 38. 気球からの落下** ● 速さ 4.9m/s で上昇している気球から、小球を静かに落下させたところ、4.0s後に地面に到達した。小球をはなした位置の地面からの高さはいくらか。ただし、重力加速度の大きさを 9.8m/s^2 とする。

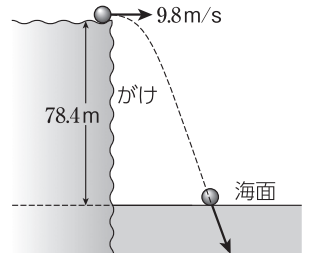
- 39. 水平投射** ● 高さ 78.4m のがけから水平方向に 9.8m/s の速さで小球を投げ出した。重力加速度の大きさを 9.8m/s^2 として、次の各問に答えよ。
- (1) 小球が投げ出されてから、1.0s後の速さはいくらか。
 - (2) 小球が投げ出されてから、海面に達するまでの時間を求めよ。
 - (3) 小球が海面に達した位置は、投げ出された地点の真下の海面の位置から何mはなれているか。



→ 例題5



→ 例題5

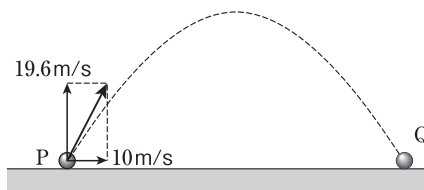


→ 例題6



知識 物理

40. 斜方投射 水平な地面上の点Pから、小球を斜め上方に投射した。小球は、放物線を描いて飛び、Pと同じ高さの地面上にある点Qに落ちた。小球を投げ上げたときの、初速度の水平方向の成分は10m/s、鉛直方向の成分は19.6m/sであった。重力加速度の大きさを 9.8m/s^2 として、次の各問に答えよ。

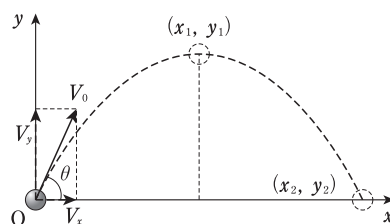


- (1) 最高点に達するまでの時間と、最高点の高さを求めよ。
- (2) 点Qに落ちる直前の、小球の速度の水平成分と鉛直成分の大きさを求めよ。
- (3) 点Pから点Qまでの距離を求めよ。

→ 例題7

知識 物理

41. 斜方投射 水平面上の点Oから、水平とのなす角が θ の向きに小球を投げ上げた。初速度の大きさを V_0 、投げ上げた位置を原点とし、水平右向きに x 軸、鉛直上向きに y 軸をとる。投げ上げた時刻を $t=0$ とし、重力加速度の大きさを g とする。次の各問に答えよ。



- (1) 初速度の x 成分 V_x 、 y 成分 V_y をそれぞれ求めよ。
- (2) 時刻 t における速度の x 成分 v_x 、 y 成分 v_y を、 V_0 、 θ 、 g 、 t を用いてそれぞれ表せ。
- (3) 時刻 t における小球の位置を示す座標 (x, y) を、 V_0 、 θ 、 g 、 t を用いて表せ。
- (4) 最高点に達する時刻 t_1 と、最高点の位置を示す座標 (x_1, y_1) を、 V_0 、 θ 、 g を用いてそれぞれ表せ。
- (5) 小球が再び地面に達する時刻 t_2 と、地面に落下した地点の位置を示す座標 (x_2, y_2) を、 V_0 、 θ 、 g を用いてそれぞれ表せ。

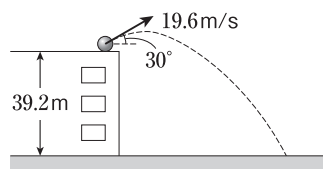
→ 例題7



- 【ヒント】
- (1) 三角比を用いて、小球の速度を分解する。
 - (4) 最高点では速度の鉛直方向の成分が0となる。
 - (5) 再び地面に達したとき、高さ(y 座標)が0である。

知識 物理

42. ビルの上からの斜方投射 水平な地面からの高さが39.2mのビルの屋上から、水平方向に対して 30° 上方に向かって、小球を速さ19.6m/sで投げた。重力加速度の大きさを 9.8m/s^2 として、次の各問に答えよ。



- (1) 投げてから最高点に達するまでの時間は何sか。
- (2) 小球が達する最高点は、屋上から何m上の点か。
- (3) 小球を投げてから地面に達するまでの時間は何sか。
- (4) 地面に落下する位置は、投射点から水平方向に何mはなれているか。

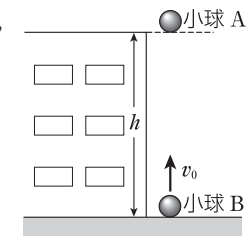
→ 例題7

発展例題3 自由落下と鉛直投げ上げ

→ 発展問題 43, 44

高さ h のビルの屋上から、小球Aを自由落下させると同時に、その真下の地面から、小球Bを速さ v_0 で鉛直上向きに投げ上げたところ、空中でAとBが衝突した。重力加速度の大きさを g として、次の各問に答えよ。

- (1) 時間 t 経過後の、Aの屋上からの落下距離 y_A を求めよ。
- (2) 時間 t 経過後の、Bの地面からの高さ y_B を求めよ。
- (3) 衝突した地点の地面からの高さを求めよ。



【指針】 小球Aの落下距離は、自由落下の公式を用いて求める。また、小球Bの高さは、鉛直投げ上げの公式を用いて求める。両者が衝突した地点では、 $y_A + y_B = h$ の関係が成り立ち、(1)、(2)の結果を利用する。

【解説】 (1) 落下距離 y_A は、 $y_A = \frac{1}{2}gt^2$

(2) 高さ y_B は、 $y_B = v_0t - \frac{1}{2}gt^2$

(3) 衝突した地点では、 $y_A + y_B = h$ の関係が成り立つ。(1)、(2)の結果を用いて、

$$\frac{1}{2}gt^2 + v_0t - \frac{1}{2}gt^2 = h \quad t = \frac{h}{v_0}$$

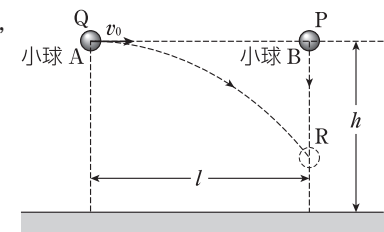
これを(2)の y_B の式に代入して、

$$y = v_0 \times \frac{h}{v_0} - \frac{1}{2}g \times \left(\frac{h}{v_0}\right)^2 = h - \frac{gh^2}{2v_0^2}$$

発展例題4 水平投射と自由落下 物理

→ 発展問題 49

地上からの高さ h の点Pにある小球Bに向けて、同じ高さで距離 l だけ離れた点Qから、水平に速さ v_0 で小球Aを投げ出した。小球Aが投げ出されると同時に、小球Bは自由落下を始め、2つの小球は点Pの真下の点Rで衝突した。重力加速度の大きさを g として、次の各問に答えよ。



- (1) 小球Aが点Rに達するまでの時間を求めよ。
- (2) 地面に達するまでに2つの小球が衝突するためには、速さ v_0 はいくらよりも大きくなければならないか。

【指針】 小球Aは、水平方向に速さ v_0 の等速直線運動をし、鉛直方向に自由落下と同じ運動をする。(1)で求める時間は、小球Aが水平方向に距離 l だけ進む時間に相当する。また、(2)では、(1)で求めた時間における小球Bの落下距離が、距離 h よりも小さければ衝突がおこる。

【解説】 (1) 小球Aが、水平方向に距離 l だけ進むのに要する時間 t は、

$$t = \frac{l}{v_0}$$

- (2) AとBが衝突するとき、Bの落下距離 y は、(1)で求めた時間を用いて、

$$y = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}g\left(\frac{l}{v_0}\right)^2 = \frac{gl^2}{2v_0^2} \quad \dots \textcircled{1}$$

地面に達するまでに2つの小球が衝突するためには、 $y < h$ の関係があればよい。式①から、

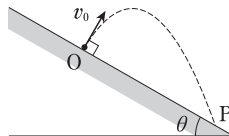
$$\frac{gl^2}{2v_0^2} < h \quad v_0^2 > \frac{gl^2}{2h} \quad v_0 > \sqrt{\frac{g}{2h}} l$$

【Point】 小球AとBは、どちらも鉛直方向に自由落下をしており、衝突するまでの間、どの時刻においても両者の高さは等しい。したがって、Aが水平方向に距離 l だけ運動したとき、衝突がおこる。



発展例題5 斜面への斜方投射 物理 →発展問題 48, 52

図のように、傾斜角 θ の斜面上の点 O から、斜面と垂直な向きに小球を初速 v_0 で投げ出したところ、小球は斜面上の点 P に落下した。重力加速度の大きさを g として、次の各問に答えよ。

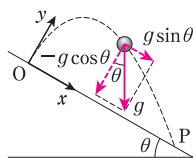


- (1) 小球を投げ出してから、斜面から最もはなれるまでの時間を求めよ。
- (2) OP 間の距離を求めよ。

指針 重力加速度を斜面に平行な方向と垂直な方向に分解する。このとき、各方向における小球の運動は、重力加速度の成分を加速度とする等加速度直線運動となる。

解説

- (1) 斜面に平行な方向に x 軸、垂直な方向に y 軸をとる(図)。重力加速度の x 成分、 y 成分は、それぞれ次のように表される。



x 成分: $g \sin \theta$ y 成分: $-g \cos \theta$
 y 方向の運動に着目する。小球が斜面から最もはなれるとき、 y 方向の速度成分 v_y が 0 となる。求める時間を t_1 とすると、「 $v_y = v_0 - g \cos \theta \cdot t$ 」の式から、

$$0 = v_0 - g \cos \theta \cdot t_1 \quad t_1 = \frac{v_0}{g \cos \theta}$$

- (2) P は $y=0$ の点であり、落下するまでの時間を t_2 として、「 $y = v_0 t - \frac{1}{2} g \cos \theta \cdot t^2$ 」の式から、

$$0 = v_0 t_2 - \frac{1}{2} g \cos \theta \cdot t_2^2$$

$$0 = t_2 \left(v_0 - \frac{1}{2} g \cos \theta \cdot t_2 \right)$$

$$t_2 > 0 \text{ から, } t_2 = \frac{2v_0}{g \cos \theta}$$

x 方向の運動に着目すると、 $x = \frac{1}{2} g \sin \theta \cdot t^2$ から、OP 間の距離 x は、

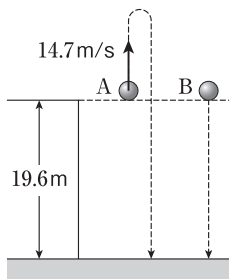
$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} g \sin \theta \cdot t_2^2 = \frac{1}{2} g \sin \theta \cdot \left(\frac{2v_0}{g \cos \theta} \right)^2 \\ &= \frac{2v_0^2 \tan \theta}{g \cos \theta} \end{aligned}$$

Point y 方向の等加速度直線運動は、折り返し地点の前後で対称である。 $y=0$ から y 方向の最高点に達するまでの時間と、最高点から再び $y=0$ に達するまでの時間は等しく、 $t_2 = 2t_1$ として t_2 を求めることもできる。

発展問題

知識 43. 投げ上げと自由落下 図のように、高さ 19.6m のビルの屋上から、小球 A を真上に速さ 14.7m/s で投げ上げた。小球 A は、投げ上げた地点を通過して地面に達した。重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 として、次の各問に答えよ。

- (1) 小球 A が地面に達するのは、投げ上げてから何 s 後か。
- (2) 小球 B をビルの屋上から自由落下させる。小球 A と B を同時に地面に到達させるためには、小球 A を投げ上げてから何 s 後に小球 B を落下させればよいか。



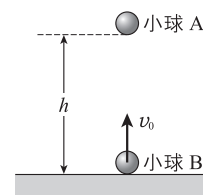
→ 例題 3

ヒント

- 43 (2) 小球 B が地面に達するまでにかかる時間を求める。

思考

44. 2 球の投げ上げ 小球 A を鉛直上向きに投げ上げ、最高点に達した瞬間に、小球 B を地面から鉛直上向きに速さ v_0 で投げ上げた。このとき、図のように、小球 A は地面から高さ h の点にあり、小球 B の真上に位置していた。小球 A が最高点に達した時刻を $t=0$ 、小球 A、B が衝突する時刻を t_1 、重力加速度の大きさを g として、次の各問に答えよ。

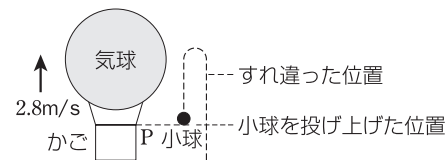


- (1) 衝突時における小球 A、B の地面からの高さを、 t_1 を含んだ式でそれぞれ表せ。
- (2) 時刻 t_1 を、 v_0 、 h を用いて表せ。
- (3) 衝突時における小球 A、B の地面からの高さを、 t_1 を含まない式で表せ。
- (4) 小球 B が最初に地面に落下する前に小球 A と衝突するための v_0 の条件を求めよ。

→ 例題 3

知識

45. 気球からの投げ上げ 鉛直上向きに速さ 2.8 m/s で上昇する気球がある。気球のかごの上端 P から、鉛直上向きに小球を投げ上げたところ、1.0s 後に上端 P と小球がすれ違った。重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 として、次の各問に答えよ。

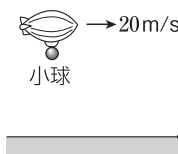


- (1) 小球とすれ違ったときのかごの上端 P は、小球を投げ上げた位置から何 m の高さにあるか。
- (2) 地面から見たとすると、気球から投げ上げられた直後の小球の速度はいくらに見えるか。
- (3) すれ違ったときの、気球に対する小球の相対速度はいくらか。

(湘南工科大 改)

思考 物理

46. 飛行船からの投射 図のように、速さ 20 m/s で水平に飛行している飛行船から、小球を静かにはなしたところ、5.0s 後に地面の的に命中した。重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 として、次の各問に答えよ。



- (1) 飛行船から見ると、小球はどのような運動に見えるか。
- (2) 飛行船の高度は何 m か。
- (3) 小球をはなした位置は、的から水平距離で何 m はなれているか。

ヒント

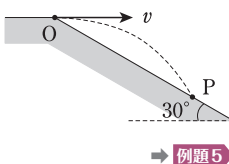
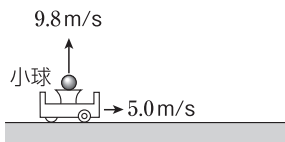
- 44 (1) 小球 A は時刻 $t=0$ で高さ h から自由落下をはじめと考えることができる。
 (4) 小球 A、B の衝突する高さが、地面よりも上であればよい。
 45 (3) 気球から小球を見たときの相対速度は、 $v_{\text{気球} \rightarrow \text{小球}} = v_{\text{小球}} - v_{\text{気球}}$ と表される。
 46 飛行船からはなされた小球の運動は、地面から見ると水平投射になる。



47. 台車からの打ち上げ ■ 図のように、水平面を右向きに速さ 5.0 m/s で等速直線運動をしている台車から、台車から見て、速さ 9.8 m/s で鉛直上向きに小球を打ち上げた。重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 とする。

- (1) 小球が最高点に達するのは何 s 後か。
- (2) 打ち上げられた位置からの最高点の高さは何 m か。
- (3) 小球が台車にもどってくるまでに、台車は何 m 進んだか。

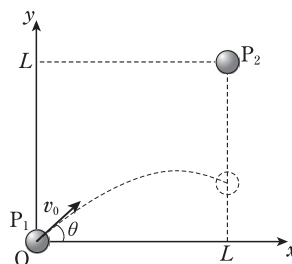
48. 斜面への投射 ■ 図において、OP は傾きが 30° の斜面である。上端 O から水平に速さ v で小球を投げ出し、小球が斜面に落下した点を P とする。OP の距離と、投げ出されてから P に達するまでの時間を求めよ。ただし、重力加速度の大きさを g とする。



→ 例題 5

▶ 49. 斜方投射と自由落下 ■ 図のように、水平方向に x 軸、鉛直方向に y 軸を取り、原点 O に小球 P_1 を、座標 (L, L) の位置 $(0 < L)$ に小球 P_2 をそれぞれ置いた。時刻 $t=0$ に、 P_1 を速さ v_0 で、 x 軸と角 θ $(0^\circ < \theta < 90^\circ)$ をなす向きに投射し、それと同時に P_2 を初速度 0 で落下させた。その後、時刻 t_1 で P_1 と P_2 は衝突した。重力加速度の大きさを g として、次の各問に答えよ。

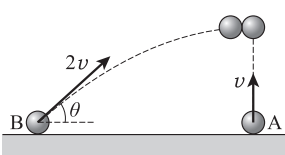
- (1) t_1 を v_0, L, θ を用いて表せ。
- (2) θ の値はいくらか。
- (3) P_1 と P_2 が衝突する位置が x 軸よりも上側になるための v_0 の条件を求めよ。



(23. 千葉工業大 改) → 例題 4

▶ 50. 斜方投射と鉛直投げ上げ ■ 図のように、小球 A を鉛直上向きに速さ $v[\text{m/s}]$ で打ち上げる。同時に、小球 B を A の側に向けて、水平面上と角度 θ をなす向きに速さ $2v[\text{m/s}]$ で打ち上げると、A の最高点で A と B は衝突した。重力加速度の大きさを $g[\text{m/s}^2]$ とする。

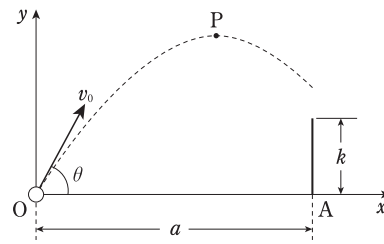
- (1) 角度 θ を求めよ。
- (2) A, B をそれぞれ打ち上げた点の間の距離を、 v, g を用いて表せ。
- (3) A から B を見ると、衝突するまでの間、B はどのような運動をするように見えるか。



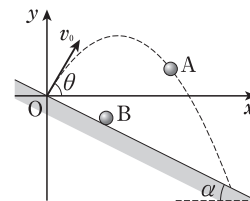
ヒント

- 47 台車から打ち上げられた小球の運動は、地面から見ると斜方投射になる。
 48 OP の距離を l として、水平方向と鉛直方向の移動距離を、 l を用いてそれぞれ表す。
 49 衝突したときの 2 球の位置は等しい。
 50 (1) 衝突した時刻において、両者の高さは等しい。(3) A から見た B の相対速度を調べる。

▶ 51. 斜方投射 ■ 図のように、地上の点 O から、水平とのなす角が θ の向きに、初速 v_0 で小球を投げ上げた。重力加速度の大きさを g とする。
 (1) 小球が最高点 P に達するまでに要する時間とその高さを、 v_0, g, θ を用いて表せ。
 (2) 小球が最高点 P に達したときの速度の水平成分を、 v_0, θ を用いて表せ。
 (3) 点 O からの水平距離が a の点 A に、高さ k の壁が垂直に立っている。小球が壁を直接こえるための、初速 v_0 の条件を求めよ。 $\tan \theta > \frac{k}{a}$ とする。 (岡山理科大 改)



52. 斜面への斜方投射 ■ 傾斜角 α のなめらかな斜面があり、O を原点として水平右向きに x 軸、鉛直上向きに y 軸をとる。重力加速度の大きさを g とする。時刻 0 に、原点 O から x 軸と θ の角をなす向きに、小球 A を速さ v_0 で投げ上げた。同時に、原点 O から小球 B を静かにはなすと、大きさ $g \sin \alpha$ の加速度で斜面をすべりおりた。



- (1) 時刻 t における小球 A の座標 (x_A, y_A) と、小球 B の座標 (x_B, y_B) を求めよ。
- (2) 小球 A と B が斜面上で衝突するための $\tan \theta$ の条件を、 v_0 を含まない式で表せ。

(北海道大 改) → 例題 5

▶ 53. 動いている物体からの投射 ■ 地上から 20.0 m の高さで、ツバメがエサをくわえて、 10 m/s の速さで水平に直線的に飛んでいる。このツバメは、ある時刻でエサを落としてしまったが、そのまま飛び続けた。エサを落としてから 1.5 s 後、ツバメはエサをとりもどすため飛ぶ方向を変え、一定の速さで直線的に下降し、地上から 40 cm の高さで、再びエサをくわえることに成功した。ツバメから見て、エサは初速度 0 で落ちていったとして、次の各問に答えよ。ただし、エサにはたらく空気抵抗の影響は無視できるものとし、重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 とする。また、図の 1 目盛りは 5.0 m である。



- (1) エサを落としてから、ツバメが再びエサをくわえるまでの時間を求めよ。
- (2) エサを落としてから、ツバメが再びエサをくわえるまでの、地上から見たツバメとエサの軌跡の概形をそれぞれ図に描け。
- (3) ツバメが最初飛んでいた向きと下降した向きとのなす角を θ とするとき、 $\tan \theta$ の値を求めよ。 (21. 奈良女子大 改)



ヒント

- 51 (3) 小球が水平方向に距離 a だけ進んだとき、高さが k よりも大きければよい。
 52 (2) 時刻 t において、小球 A, B の座標が一致すればよい。
 53 (1) ツバメが落としたエサの運動は、地上から見ると水平投射になる。